PRIMENA INTEGRALNIH KARAKTERISTIKA BINOMNE RASPODELE U TEHNOLOGIJI MATERIJALA

APPLICATION OF INTEGRAL CHARACTERISTICS OF THE BINOMIAL DISTRIBUTION IN MATERIALS TECHNOLOGY

Janja Nedović[1)], Dejan Blagojević[2)], Zoran Popović[3)], Dimitrije Stefanović[4)]

Rezime: *U ovom radu razmatrali smo integralne karakteristike binomne raspodele, na osnovu koje se mogu sprovesti izvesne prognoze tehno-ekonomskih parametara proizvodnje i analize kvaliteta na osnovu određivanja maksimalnih entropija pojedinih tehnoloških koraka u okviru obrade materijala tehnologijama sečenja i hemijske obrade. U tom slučaju preciznost i raznovrsnost tehnologije je određena najmanjim strukturnim jedinicama koje se uklanjaju sečenjem, ili hemijskim dejstvom. Formula binomne raspodele u tom slučaju biće određena brojem elementarnih strukturnih jedinica pri tome otklonjenim, odnosno brojem elementarnih strukturnih jedinica u polaznom komadu materijala. Inače, kako se binomna raspodela izučava na bazi analize kombinacija i kompozicija,te na taj način dolazi do grafičkog prikaza raspodele,ona se može povezati sa ranim analizama Pascalovog trougla kombinovanim sa osnovama matematičke analize. Na taj način dobijeni rezultati ukazuju da je cilj prelaska sa kombinatorike na matematičku analizu u radovima Leibnitza bio upravo napor da se teorija kombinatorike spojena sa matematičkom analizom primeni na probleme dinamike.*
Ključne reči: *binomna raspodela, entropija, integralne karakteristike raspodele.*

Abstract: *In this paper, we considered the integral characteristics of the binomial distribution, based on which they can carry out certain forecasts techno- economic parameters of production and quality analysis based on the determination of the maximum entropy of certain technological steps within the material processing technologies, cutting and chemical treatment . In this case, the precision and versatility of technology is determined by the smallest structural units that are removed by cutting, or chemical attack. Formula binomial distribution in this case will be determined by the number of elementary structural units thereby spreading, ie the number of elementary structural units in the initial piece of material. Otherwise , how does the binomial distribution is studied based on the analysis of the combination and composition , and thus there is a graphical representation of distribution , it can be associated with early analysis of Pascal's triangle, combined with the fundamentals of mathematical analysis . In this way, the results obtained indicate that the purpose of transferring from combinatorics to mathematical analysis in the works of Leibnitz was just an effort to combinatorial theory combined with mathematical analysis applied to problems of dynamics.*
Key words: *binomial distribution , entropy , integral characteristics of the distribution*

1. UVOD

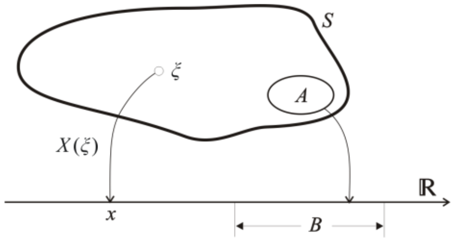
Eksperimentalne nauke, u koje se ubrajaju i sve prirodne i tehničke nauke, uveliko barataju sa eksperimentalnim rezultatima i obradom numeričkih podataka dobijenih kroz merenja različitih fizičkih veličina. Ocena verodostojnosti tih merenja, vodila je, osim ka razvoju metrologije, i ka razvoju matematičke teorije eksperimenata i matematičkih metoda određivanja verodostojnosti

1) Janja Nedović, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
2) Dejan Blagojević, Visoka tehnička škola strukovnih studija, Niš, Srbija
3) Zoran Popović, Visoka tehnička škola strukovnih studija, Zvečan
4) Dimitrije Stefanović, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija

rezultata eksperimenata, preko analize pouzdanosti i ocenjivanja greške merenja [1,2]. Ta teorija sastoji se u primeni statističkih metoda obrade eksperimentalnih osmatranja i, kroz primenu teorije verovatnoće, pokušaja uopštavanja greške merenja neke fizičke veličine. To se čini tako, što se merena veličina posmatra kao slučajna veličina. Time se dolazi na tačku gledišta, koja omogućuje prenošenje statističkih zakonitosti u teoriju greški, a samim tim i pojma disperzije, i principa vezanih za određivanje najmanje disperzije kod izračunavanja tačne vrednosti merene veličine [3].

S druge strane, kao što je poznato u okviru aksiomatske teorije modela eksperimenta definicija verovatnoće se razrađuje [4] tako što se pored $E(S,F,P)$, koji u sebi sadrži prostor verovatnoće, tj. skup S elemenata čiji su podskupovi ishodi eksperimenta, Borelijevo polje F sačinjeno od određenih podskupova S zvanih događaji, i verovatnoće P, tj. brojeve $P(x)$ koji zadovoljavaju aksiome verovatnoće, a pridruženi su svakom od događaja, polazi i od odgovarajuće funkcije X koja mapira svako $\xi \in S$ u jedinstvenu tačku $x \in \mathbb{R}$ skupa realnih brojeva, što omogućava, sa svoje strane, korišćenje matematičkog aparata na realnoj pravoj, umesto na skupovima. Kako je ishod ξ neizvesan, to je vrednost $X(\xi) = x$. Prema tome, ako je B neki podskup R, a traži se verovatnoća da je "$X(\xi) \in B$", tada se posmatra skup $A = X^{-1}(B) \in S$ koji sadrži sve $\xi \in S$ koji se mapiraju u B funkcijom X (sl. 1). Očigledno, kada skup $A = X^{-1}(B)$ takođe pripada asociranom polju F, tada su svaki događaj i verovatnoća A dobro definisani. U tom se slučaju može reći: *Verovatnoća događaja* $"X(\xi) \in B" = P(X^{-1}(B))$. Međutim, $X^{-1}(B)$ ne mora da pripada F za svako B, što stvara teškoće. Uvođenje slučajne promenljive (sl. 1) čini da inverzno mapiranje uvek kao rezultat ima događaj, tako da je moguće odrediti verovatnoću za ma koje $B \in$ □.

S obzirom da svi događaju imaju dobro definisane verovatnoće, verovatnoća događaja $\{\xi \mid X(\xi) \le x\}$ mora zavisiti od x.



***Slika 1. SLUČAJNA PROMENLJIVA** (s.p.). Za konačnu jednoznačnu funkciju X koja mapira skup svih eksperimentalnih ishoda S u skup realnih brojeva* R *se kaže da je s.p., kada je skup $\{\xi \mid X(\xi) \le x\}$ događaj $(\in F)$ za svako x u* R. *Takođe, za X se kaže da je s.p., kada $X^{-1}(B) \in F$, gde B repre-zentuje polukonačni interval oblika $\{-\infty < x \le a\}$, a svi ostali skupovi mogu se konstruisati iz ovih skupova preko unija, preseka i negacija. Borelova kolekcija B takvih podskupova* R *je najmanje σ-polje podskupova* R *koja obuhvata sve polukonačne intervale prethodnog oblika. Prema tome, kada je X s.p., tada je $\{\xi \mid X(\xi) \le x\} = \{X \le x\}$ događaj za svako x. Što se tiče $\{X = a\}$ i $\{a < x \le b\}$, činjenica je da su za $b > a$ i $\{X \le a\}$ i $\{X \le b\}$ događaji, pa je i $\{X \le a\}^c = \{X > a\}$ događaj, a odatle i $\{X > a\} \bigcap \{X \le b\} = \{a < X \le b\}$. Prema tome, $\{a - \frac{1}{n} < X \le a\}$ je događaj za svako n. Saglasno tome, takođe je događaj i $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{a - \frac{1}{n} < X \le a\} = \{X = a\}$, što znači da svi događaji imaju dobro definisanu verovatnoću.*

Označi li se sa $P\{\xi \mid X(\xi) \le x\} = F_X(x) \ge 0$ gde je uloga indeksa X identifikacija stvarne s.p., za $F_X(x)$ se kaže da predstavlja funkciju raspodele verovatnoće (engl. Probability Distrubution Function), asociranu s.p. X, i ona se, po engleskom nazivu, skraćeno označava sa PDF.

Opisanoj šemi određivanja verovatnoće prethodila su Lajbnicova razmatranja o veštini kombinovanja [5,6], gde on kroz analizu Paskalovog trougla [7] označava i prebrojava kombinacije, prepoznaje permutacije, particije i kompozicije, sa ciljem jednoobraznog opisivanja svojevremeno poznatih filozofskih, odnosno fizičkih zakonitosti. Kao osnova tih razmatranja trebalo je da mu posluži uređivanje saglasno abecedi.

Nju je sledila analiza jedne od prvih raspodela verovatnoće koja se odnosila na raspodelu "glava" i "pisama" kod bacanja novčića,a koja je prema autoru [8] nazvana Bernulijeva raspodela,odnosno binomna raspodela, koja reprezentuje verovatnoću k sukcesiv-nih nezavisnih Bernulijevih ogleda, tj. eksperiment koji se naziva serija ili niz Bernulijevih ili bernulijevskih opita [9], pri čemu su za svaki od opita moguća samo dva ishoda, čije verovatnoće ostaju iste tokom svih opita. Inače, u literaturi se najčešće i ogled i eksperiment nazivaju jednim te istim imenom, ali za prvi postoje i nazivi Bernulijeva šema ili Bernulijev opit u jednini, a za poslednji se podrazmeva množina tih opita.

Prostor uzorka, u ovom i u svim drugim eksperimentima koji se sastoje iz n Bernulijevih opita, sadrži 2^n tačaka ili nizova od n simbola S i F, tako da je svaka tačka reprezent jednog od mogućih ishoda. Kako su opiti nezavisni, verovatnoće se množe, odnosno verovatnoća ma kog određenog niza jednaka je proizvodu dobijenom zamenom simbola S i F brojevima p i q, respektivno. Tako je, na primer:

$$P\{(SSFSF \cdots FFS)\} = ppqpq \cdots qqp$$

Iz tipičnog primera je jasno da, kada se radi o nizu od n Bernulijevih opita, od interesa je određivanje samo ukupnog broja uspešnih ishoda, nezavisno od reda njihovog pojavljivanja,što odgovara otklonjenim strukturnim jedinicama tokom tehnologije ma kog materijala. Taj broj može biti jednak 0,1,...,n, a prvi se problem sastoji u određivanju odgovarajućih verovatnoća. Događaj „n opita kao rezultat daje k uspešnih i n-k neuspešnih ishoda“ sadrži onoliko elementarnih događaja, na koliko se načina može slovo k rasporediti na n mesta, pri čemu je $0 \le k \le n$. Kako se kao kombinatorni problem određuje [8] da događaj sadrži $\binom{n}{k}$ tačaka, pri čemu se svakoj tački, po definiciji, pridružuje verovatnoća $p^k q^{n-k}$, sledi Bernulijeva raspodela: Ako je $B(k;n,p) \equiv P_p(k \mid n)$ verovatnoća da od n Bernulijevih opita sa verovatnoćama p za povoljan u q=1-p za nepovoljan ishod, rezultat bude k povoljnih i n-k nepovoljnih ishoda, tada je:

$$B(k;n,p) \equiv P_p(k \mid n) =$$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

gde je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ binomni koeficijent.

Dakle, verovatnoća da ni jedna jedinica nije otklonjena $(k=0)$ jednaka je $q^n = (1-p)^n$, a verovatnoća da je bar jedna otklonjena $(k=1)$ iznosi $1-q^n = 1-(1-p)^n$.

2. ANALIZA KOEFICIJENATA BINOMNE RASPODELE

Svodeći problem tehnologija na razmatranje kombinacija i permutacija izdvojenih elementarnih jedinica iz polaznog komada materijala. Na ta razmatranja nadovezala bi se termodinamička, odnosno razmatranja iz statističke termodinamike i statističke fizike. Kako je u radu obuhvaćen i pojam entropije, njima bi se morali obuhvatiti pojmovi kompleksija, permutacija, particija i kompozicija, i njihove veze sa teorijom grupa i funkcionalnom analizom.

Entropija se uvodi na taj način što se dizajn određene konstrukcije posmatra kao modulacija strukture polaznog komada materijala do veličina elementarnih otklonjenih jedinica, čija veličina zavisi od preciznosti određenih tehnologija. S obzirom da se ne mogu razlikovati međusobno prazne „kockice“ materijala, kojih je ukupno n, kao ni one pune kojih je ukupno N-n, gde je N totalni broj kockica u polaznom komadu materijala. Prirodni logaritam broja mogućih kombinacija koji je jednak binomnom koeficijentu predstavlja entropiju:

$$\sigma = \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

U okviru oodređene tehnologije, zavisno od njene efikasnosti, mogu se iz istog komada materijala odstranjivati veći ili manji elementi odnosno može se menjati broj odstranjenih i zaostalih elemenata. Maksimalne mogućnosti dizajna biće,prema tome, određene maksimalnim brojem kombinacija, odnosno maksimalnom entropijom. Prema tome entropija sistema koja je funkcija dimenzija početnog komada materijala i dimenzija otklonjenih elementarnih jedinica koje zavise od primenjene tehnologije, može poslužiti kao mera efikasnosti određene tehnologije.

Drugim rečima, cena primene određene tehnologije biće proporcionalna entropiji, time se i kvalitet obrade svodi na egzaktnu matematičku veličinu.

2.1. Ansambli, sistemi sa 2 stanja

Drugim rečima,ta se funkcija može odrediti posmatranjem sistema sa 2 stanja energija E_1 i E_2, za koje se uslovi svode na jednačine:

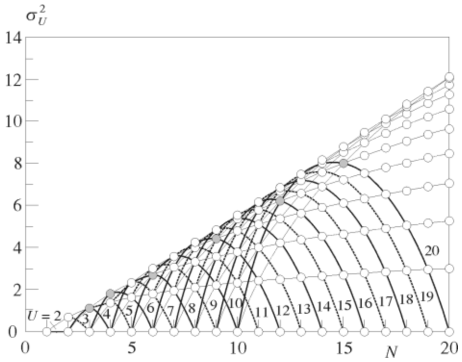
$$N_1 + N_2 = N$$

$$N_1 E_1 + N_2 E_2 = U$$

Prema tome, za date vrednosti broja čestica *N* i energije *U* sistema, rešenja po promenljivima N_1 i N_2 su jednoznačna:

$$N_1 = \frac{U - NE_1}{E_2 - E_1} = \frac{U}{E_2 - E_1} - \frac{E_1}{E_2 - E_1} N$$

$$N_2 = \frac{NE_2 - U}{E_2 - E_1} = -\frac{U}{E_2 - E_1} + \frac{E_2}{E_2 - E_1} N$$



Slika 2. SISTEMI SA DVA NIVOA. *Posmatranjem zavisnosti logaritama polinomnih koeficijenata, $\sigma_U(N) = \ln \Omega_U(N)$, za energije sistema $U \le 20E_0$ mogu se izdvojiti rasporedi (sive tačke) za koje važi jednaka raspodela ener-gija po energetskim nivoima, s obzirom da bi oni trebalo da leže duž približno linearne obvojne kriva.*

U našim ranijim radovima izvršena je analiza ovih sistema [10] pri čemu je utvrđeno da funkcije entropije poseduju obvojnice koje odgovaraju maksimumima entropija.

Prema matematičkoj teoriji, kriva linija, koja u svakoj svojoj tački dodiruje po jednu krivu date familije naziva se **obvojnica** ili **anvelopa** tih krivih. Takođe, ukoliko neka familija krivih ima obvojnicu ili anvelopu, koja se označava sa A, a ne sa O, da bi se razlikovala od oznake za koordinatni početak, tada ona u svakoj od svojih tačaka ima zajedničku tangentu sa po jednom krivom iz familije, pri čemu ona u svojim različitim tačkama tangira različite krive iz familije. Potreban uslov za egzistenciju obvojnice familija krivih broja stanja, $\Omega_U^{(2)}(N)$, odnosno njihovih logaritama, $\sigma_U^{(2)}(N)$, kada je energija U parametar familije, glasi:

$$\frac{\partial \sigma_U^2(N)}{\partial U} = \frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}U}\bigg|_{N = const.} \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma_N^2(U)}{\mathrm{d}U} = 0 \tag{4.1.53a}$$

odnosno:

$$\frac{\partial \Omega_U^2(N)}{\partial U} = \frac{\mathrm{d}\Omega^2}{\mathrm{d}U}\bigg|_{N = const.} \equiv \frac{\mathrm{d}\Omega_N^2(U)}{\mathrm{d}U} = 0$$

Ovo su istovremeno i diferencijalne jednačine obvojnica, čijim rešavanjem se dolazi do odgovarajućih funkcija. Dakle, da bi se došlo do jednačine obvojnice, polazi se od definicija parcijalnih izvoda funkcija više promenljivih, na osnovu kojih se zna da su parcijalni izvodi $\partial\Omega/\partial U$ i $\partial\sigma/\partial U$ u suštini ekvivalentni običnim izvodima za funkcije $\Omega_N^{(2)}(U)$ i $\sigma_N^{(2)}(U)$ kada se promenljiva N posmatra kao parametar, tj. prilikom traženja izvoda smatra se konstantom. Drugim rečima, da bi se došlo do tačaka, pa i jednačine obvojnice, potrebno je da se analizira zavisnosti $\sigma_N^{(2)}(U)$ za odgovarajuće vrednosti broja čestica sistema N .To se uobičajeno radi tako da se posmatraju sve familije takvih krivih pa se između njih izdvajaju one čiji ekstremumi (u ovom slučaju maksimumi označeni tamnijim kružićima) odgovaraju tačkama obvojnice $\sigma_U^{(2)}(N)$.

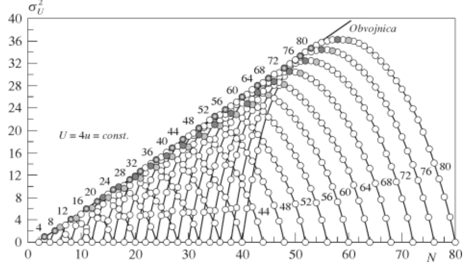
Naravno, s obzirom da se ovde radi o diskretnim zavisnostima, te da su već uočene ekstremalne zavisnosti $\sigma_U^{(2)}(N)$ i $\Omega_N^{(2)}(U)$, sada se problem može razmatrati numerički i grafički, tj. direktnim posmatranjem njihovih maksimuma, a ne i njihovih izvoda. Pri tome se jasno uočava i da familije krivih $\sigma_N^{(2)}(U)$, odnosno $\Omega_N^{(2)}(U)$, takođe poseduju obvojnicu, za čiju egzistenciju su potrebni uslovi:

$$\frac{\partial \sigma_N^{(2)}(U)}{\partial N} = \frac{\mathrm{d}\sigma^{(2)}}{\mathrm{d}N}\bigg|_{U = const.} \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma_N^{(2)}(U)}{\mathrm{d}N} = 0$$

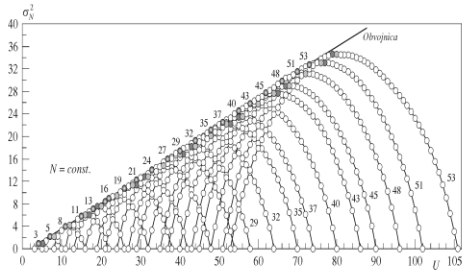
odnosno:

$$\frac{\partial \Omega_N^{(2)}(U)}{\partial N} = \frac{\mathrm{d}\Omega^{(2)}}{\mathrm{d}N}\bigg|_{U = const.} \equiv \frac{\mathrm{d}\Omega_N^{(2)}(U)}{\mathrm{d}N} = 0$$

koji će biti i diferencijalne jednačine tih obvojnica.



(a)



(b)

Slika 3. OBVOJNICE SISTEMA SA DVA NIVOA. *Posmatrajući maksimalne vrednosti (tamni kružići) i vrednosti logaritama polinomnih koeficije-nata za energije sistema U = 4u pri kojima je raspodela energija po nivoima jednaka (svetlo sivi kružići) videćemo da jednaka raspodela energije odgo-vara maksimumu do u = 5, a da se zatim u odnosu na nju pomera udesno (a). Obvojnica za U = const. (nijansirani kružići) čije tačke odgovaraju mak-simumima polinomnih koeficijenata za N = const. (b). Takođe, polinomni koeficijenti za N = const. poseduju obvojnicu (nijansirani kružići) čije tačke odgovaraju maksimumima polinomnih koeficijenata za U = const. kada se uočava i pravila odnos krivih za pojedine vrednosti N i U.*

S obzirom da se zavisnosti $\sigma_N^{(2)}(U)$ razlikuju u odnosu na parnost broja čestica, pogodno je da se sada odvojeno posmatraju. Naime, kada je $N \in 2\mathbb{N}$ one se karakterišu jednim maksimumom, tako da je praćenjem istih lako odrediti njihove maksimume (označene tamnim kružićima), kao i tačke njihove zajedničke obvojnice (označene nijansiranim kružićima).

Pri tome, jednoznačno određeni maksimumi odgovaraju energijama sistema, tj. $U = 3u$ ($u = nE_0 = 1, 2, ...$), pa posmatranjem zavisnosti $\sigma_U^2(N)$ za te vrednosti energije utvrđujemo da one zaista odgovaraju tačkama obvojnice (označene nijansiranim kružićima).

S obzirom da obvojnice dele prostore logaritama polinomnih koeficijenata $\sigma_N^2(U)$ i $\sigma_U^2(N)$ na dva dela, njih možemo predstaviti i kontinualnim krivama, ispod kojih leže diskretne vrednosti polinomnih koeficijenata. Naravno, njihove jednačine moraju zadovoljavati i napred nabrojane diferencijalne jednačine, tako da ukazuju i na činjenicu da su zavisnosti ispod njih ne samo familija krivih sa jednim zajedničkim parametrom, već da će se i njihovi parcijalni izvodi karakterisati bar jednim zajedničkim parametrom.

3. ZAKLJUČAK

Na osnovu naše originalne analize egzistencije obvojnica može se doći do zaključka da procesi obrade materijala koji se pri obradama otklanjanja jako malih jedinica mogu posmatrati kao slučajni procesi, te razmatrati u granicama njihovog statističkog ponašanja, da postoji i određena determinisanost procesa u granicama dizajna materijala. Pri tome se konačni dizajn može posmatrati kroz tačke na obvojnim krivama određenim početnim i konačnim oblikom obrađenog materijala kada se on poistoveti sa odgovarajućim ansamblima strukturnih jedinica materijala.

Jasno je da ma kako se i sa ma kojom pažljivošću obrađuje materijal,preciznost njegovog konačnog dizajna određena je odgovarajućim entropijama koje se mogu vezati bilo za fizičke procese,bilo za psihofiziološku spremnost tehnologa koji upravlja procesom.

REFERENCES:

[1] Whittaker, Edmund Taylor; and Robinson, George; The Calculus of Obser-vations. A Treatise on Numerical Mathematics (by E.T. Whittaker, Sc.D., F.R.S., Professor of Mathematics in the University of Edinburgh, and G. Ro-binson M.A., B.Sc., Lecturer in Mathematics in the University of Edinburgh), Second impression (with corrections), Blackie & Son, Ltd., *London, 1924 (*First print *1924)*.

[2] Russell, Bertrand; Human Knowledge: Its Scope and Limits, Simon and Schuster, New York, 1948 (p. 344).

[3] Sheynin, Oscar B.; История теории ошибок (Istoria Teorii Oshibok), *Берлин, 2007.*

[4] Papoulis, Athanasios; and Pillai, S. Unnikrishna; Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Fourth Edition, McGraw-Hill Comp., Co-pyright *2002 (ISBN 0-07-366011-6)*.

[5] Leibniz, Gottfried Wilhelm; Dissertatio de Arte Combinatoria, in qua Ex Arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, Seu Logicæ Inventionis semina sparguntur. Praefixa est Synopsis totius Tractatus, et additamenti loco Demonstratio Existentiæ dei, ad Mathematicam certitudinem exacta. (Autore Gottfredo Guilielmo Leibnüzio Lipsiensi, Phil. Magist. & J.U. Bac-cal.), Apud Joh. Simon. Fickium et Joh. Polycarp. Seuboldum, *Lipsiæ, a. 1666*.

[6] Wilson, Robin; and Watkins, John J. as ed.; Combinatorics: Ancient & Modern (Edited by Robin Wilson & John J. Watkins), Oxford University Press, Oxford (UK), 2013; ISBN 978-0-19-965659-2.

[7] Pascal, Blaise; Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière (Par Monsieur Pascal), Chez Guillaume Des-prez, *A Paris, 1665*.
[8] Bernoulli, Jacob; (Jacobi Bernoulli, Profess. Basil. et utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal. Mathematici Celebrrimi), Ars Conje-ctandi, Opus Posthumum, Accedit Tractatus de Seriebus Infinitis, et Epis-tola Gallicè scripta De Ludo Pilæ Reticularis, Impensis Thurnisiorum, Fratrum, *Basileæ, 1713*.
[9] Feller, William; An Introduction to Probability Theory and Its Applicati-ons (by William Feller, Eugene Higgins Professor of Mathematics, Prince-ton University), Volume I, John Wiley & Sons. Inc. – Chapman & Hall. Ltd, *New York – London, 1950*.
[10] Dejan R Blagojević, Particiona funkcija sistema sa četiri i pet stanja i njena primena za izračunavanje termičke i difuzione inretakcije,magistarska teza